

**КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА ПО КУРСУ «ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА И ПРМЗ»  
ДЛЯ СТУДЕНТОВ 4 КУРСА ОЗО**

**Вариант 1.**

1. Дан ромб  $ABCD$  с диагоналями  $AC = 24$  и  $BD = 10$ . Проведена окружность радиуса  $\frac{5\sqrt{2}}{2}$  с центром в точке пересечения диагоналей ромба. Прямая, проходящая через вершину  $B$  касается этой окружности и пересекает прямую  $CD$  в точке  $M$ . Найдите  $CM$ .
2. Окружность, построенная на медиане  $BM$  равнобедренного треугольника  $ABC$  как на диаметре, второй раз пересекает основание  $BC$  в точке  $K$ .
  - а) Докажите, что отрезок  $BK$  больше отрезка  $CK$ .
  - б) Пусть указанная окружность пересекает сторону  $AB$  в точке  $N$ . Найдите  $AB$ , если  $BK = 24$  и  $BN = 23$ .
3. Две окружности пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Прямая, проходящая через точку  $P$ , второй раз пересекает первую окружность в точке  $A$ , а вторую — в точке  $D$ . Прямая, проходящая через точку  $Q$  параллельно  $AD$ , второй раз пересекает первую окружность в точке  $B$ , а вторую — в точке  $C$ .
  - а) Докажите, что четырёхугольник  $ABCD$  — параллелограмм.
  - б) Найдите отношение  $CP : PB$ , если радиус первой окружности втрое больше радиуса второй.
4. В прямоугольнике  $ABCD$   $AB = 2$ ,  $BC = \sqrt{3}$ . Точка  $E$  на прямой  $AB$  выбрана так, что  $\angle AED = \angle DEC$ . Найдите  $AE$ .
5. Медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Известно, что  $AC = 3MB$ .
  - а) Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.
  - б) Найдите сумму квадратов медиан  $AA_1$  и  $CC_1$ , если известно, что  $AC = 10$ .
6. Окружность радиуса  $12\sqrt{2}$  вписана в прямой угол. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках  $M$  и  $N$ . Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 16. Найдите  $MN$ .
7. В параллелограмме  $ABCD$  известны стороны  $AB = a$ ,  $BC = b$  и  $\angle BAD = \alpha$ . Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников  $BCD$  и  $DAB$ .
8. В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$  диагонали  $AC$  и  $BD$  пересекаются в точке  $O$ . Площади треугольников  $AOB$  и  $COD$  равны.
  - а) Докажите, что точки  $A$  и  $D$  одинаково удалены от прямой  $BC$ .
  - б) Найдите площадь треугольника  $AOB$ , если известно, что  $AB = 13$ ,  $BC = 10$ ,  $CD = 15$ ,  $DA = 24$ .
9. В равнобедренную трапецию  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$  вписана окружность. Вторая окружность, построенная на боковой стороне  $AB$  как на диаметре, второй раз пересекает большее основание  $AD$  в точке  $H$ .
  - а) Докажите, что треугольник  $CHD$  равнобедренный.
  - б) Найдите основания трапеции, если радиусы первой и второй окружностей равны соответственно 6 и 6,5.
10. В окружность вписан четырёхугольник  $ABCD$ , диагонали которого взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке  $E$ . Прямая, проходящая через точку  $E$  и перпендикулярная к  $AB$ , пересекает сторону  $CD$  в точке  $M$ . Известно, что  $AD = 8$ ,  $AB = 4$ , угол  $CDB$  равен  $60$  градусов.
  - а) Докажите, что  $EM$  — медиана треугольника  $CED$ .
  - б) Найдите длину  $EM$ .

## Вариант 2.

1. Окружности радиусов 11 и 21 с центрами  $O_1$  и  $O_2$  соответственно касаются внутренним образом в точке  $K$ ,  $MO_1$  и  $NO_2$  — параллельные радиусы этих окружностей, причём  $\angle MO_1O_2 = 120^\circ$ . Найдите  $MN$ .
2. Высоты  $BB_1$  и  $CC_1$  остроугольного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $H$ .
  - а) Докажите, что  $\angle AHB_1 = \angle ACB$ .
  - б) Найдите  $BC$ , если  $AH = 21$  и  $\angle BAC = 30^\circ$ .
3. Диагонали  $AC$  и  $BD$  четырёхугольника  $ABCD$ , вписанного в окружность, пересекаются в точке  $P$ , причём  $BC = CD$ .
  - а) Докажите, что  $AB : BC = AP : PD$ .
  - б) Найдите площадь треугольника  $COD$ , где  $O$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABD$ , если дополнительно известно, что  $BD$  — диаметр описанной около четырёхугольника  $ABCD$  окружности,  $AB = 6$ , а  $BC = 6\sqrt{2}$ .
4. Угол  $C$  треугольника  $ABC$  равен  $60^\circ$ ,  $D$  — отличная от  $A$  точка пересечения окружностей, построенных на сторонах  $AB$  и  $AC$  как на диаметрах. Известно, что  $BD : DC = 1 : 3$ . Найдите синус угла  $A$ .
5. Точка  $M$  лежит на отрезке  $AB$ . На окружности с диаметром  $AB$  взята точка  $C$ , удаленная от точек  $A$ ,  $M$  и  $B$  на расстояния 40, 29 и 30 соответственно. Найдите площадь треугольника  $BMC$ .
6. На стороне  $CD$  квадрата  $ABCD$  построен равносторонний треугольник  $CPD$ . Найдите высоту треугольника  $ABP$ , проведённую из вершины  $A$ , если известно, что сторона квадрата равна 1.
7. Медианы  $AA_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $M$ . Известно, что  $AC = 3MB$ .
  - а) Докажите, что треугольник  $ABC$  прямоугольный.
  - б) Найдите сумму квадратов медиан  $AA_1$  и  $CC_1$ , если известно, что  $AC = 8$ .
8. В трапеции параллельно основаниям проведены четыре отрезка с концами на боковых сторонах:  $KL$ ,  $MN$ ,  $RS$  и  $TQ$ . Известно, что первый отрезок проходит через точку пересечения диагоналей трапеции, второй — делит ее на два подобных четырехугольника, третий — соединяет середины боковых сторон, четвертый разбивает трапецию на две равновеликие части.
  - а) Найдите длины этих отрезков.
  - б) Докажите, что  $KL < MN < RS < TQ$ .
9. Четырёхугольник  $ABDC$  вписан в окружность. Прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $P$ .
  - а) Докажите, что  $AD \cdot BP = BC \cdot DP$ .
  - б) Найдите площадь треугольника  $APC$ , если известно, что  $BD = 2 \cdot AC$ , а площадь четырёхугольника  $ABDC$  равна 36.
10. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 12, а косинус острого угла равен 0,6.